BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2015***

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

С.Ш.КАДЫРОВА
Бакинский Государственный Университет
Институт Систем Управления НАН Азербайджана
akja-2@mail.ru

В работе изучается задача о минимуме линейного функционала определенного на решениях линейной системы типа Россера. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума.

Ключевые слова: система типа Россера, необходимое и достаточное условие оптимальности, дискретный принцип максимума, формула приращения.

1. Допустим, что управляемый процесс описывается следующей системой линейных разностных уравнений

$$
\begin{gathered}
z(t+1,x)=A(t,x)z(t,x)+B(t,x)y(t,x)+f(t,x,u(t,x)),\\
t=t_0,t_0+1...,t_1-1;\;\; x=x_0,x_0+1...,x_1,\\
y(t,x+1)=C(t,x)z(t,x)+D(t,x)y(t,x)+g(t,x,u(t,x)),\\
t=t_0,t_0+1...,t_1;\;\; x=x_0,x_0+1...,x_1-1
\end{gathered}
\tag{1}
$$

с краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
z(t_0,x)=a(x), \qquad x=x_0,x_0+1...,x_1,\\
y(t,x_0)=b(t), \;\; t=t_0,t_0+1...,t_1.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$ – заданные дискретные матричные функции соответствующих размерностей, $(z(t,x),y(t,x))$ – $(n+m)$ мерный вектор состояния, $a(x)$ и $b(t)$ заданные, соответственно, n и m-мерные дискретные вектор-функции, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, причем разности t_1-t_0, x_1-x_0 есть натуральные числа, $f(t,x,u)$, $g(t,x,u)$ – заданные непрерывные по u при всех (t,x) n и m-мерные вектор-функции соответственно, $u(t,x)$ r- мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t,x)\in U\ ,\ \ (t,x)\in T\times X\ ,\ \left(T=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\},\ X=\{x_0,x_0+1,\dots,x_1-1\}\right). \quad (3)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

На решениях краевой задачи (1)-(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}c'(x)z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}d'(t)y(t,x_1). \quad (4)$$

Здесь $c(x)$ и $d(t)$ – заданные n и m-мерные дискретные вектор функции.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление $u(t,x)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x),z(t,x),y(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Вычислим приращение функционала (4) соответствующее допустимым управлениям $u(t,x)$ и $\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x)$.

Через $(z(t,x),y(t,x))$ и $(\bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\ \ \bar{y}(t,x)=y(t,x)+\Delta y(t,x))$ обозначим решения краевой задачи (1)-(2) соответствующие допустимым управлениям $u(t,x)$ и $\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x)$.

Имеем

$$\Delta S(u)=S(\bar{u})-S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}c'(x)\Delta z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}d'(t)\Delta y(t,x_1). \quad (5)$$

Ясно, что $(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x))$ является решением краевой задачи

$$\Delta z(t+1,x)=A(t,x)\Delta z(t,x)+B(t,x)\Delta y(t,x)+\left[f(t,x,\bar{u}(t,x))-f(t,x,u(t,x))\right], \quad (6)$$

$$\Delta y(t,x+1)=C(t,x)\Delta z(t,x)+D(t,x)\Delta y(t,x)+\left[g(t,x,\bar{u}(t,x))-g(t,x,u(t,x))\right],$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_0,x)=0,\\ \Delta y(t,x_0)=0.\end{gathered} \quad (7)$$

Предположим, что $p(t,x)$ и $q(t,x)$ пока неизвестные n и m-мерные вектор-функции и введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,u,p,q)=p'f(t,x,u)+q'g(t,x,u).$$

Из (6) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t,x)\Delta z(t+1,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[p'(t,x)A(t,x)\Delta z(t,x)+p'(t,x)B(t,x)\Delta y(t,x)\right]+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t,x)\left[f(t,x,\bar{u}(t,x))-f(t,x,u(t,x))\right], \quad (8)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x)\Delta y(t,x+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x)C(t,x)\Delta z(t,x) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x)D(t,x)\Delta y(t,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x)\left[g(t,x,\bar{u}(t,x)) - g(t,x,u(t,x))\right]. \quad (9)$$

Заменой переменных легко доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t,x)\Delta z(t+1,x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1,x)\Delta z(t,x), \quad (10)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x)\Delta y(t,x+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t,x_1-1)\Delta y(t,x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x-1)\Delta y(t,x). \quad (11)$$

Учитывая тождества (8), (9), (10), (11) в (5) получим

$$\Delta S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x)\Delta z(t_1,x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} d'(t)\Delta y(t,x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1,x)\Delta z(t,x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t,x_1-1)\Delta y(t,x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t,x-1)\Delta y(t,x) -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[p'(t,x)A(t,x)\Delta z(t,x) + q'(t,x)C(t,x)\Delta z(t,x)\right] -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[p'(t,x)B(t,x)\Delta y(t,x) + p'(t,x)D(t,x)\Delta y(t,x)\right] -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H(t,x,\bar{u}(t,x),p(t,x),q(t,x)) - H(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x))\right]. \quad (12)$$

Если предположить, что вектор-функции $p(t,x)$ и $q(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} p(t-1,x) = A'(t,x)\,p(t,x) + C'(t,x)q(t,x), \\ q(t,x-1) = B'(t,x)\,p(t,x) + D'(t,x)q(t,x), & (13) \\ p(t_1-1,x) = -c(x), \\ q(t,x_1-1) = -d(t), & (14) \end{cases}$$

тогда формула приращения (12) примет вид

$$S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H(t,x,\bar{u}(t,x),p(t,x),q(t,x)) - H(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x))\right]. \quad (15)$$

Система разностных уравнений (13) с краевыми условиями (14) назовем сопряженной системой в задаче (1)-(4).

3. Формула приращения (15) позволяет доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\max_{v\in U} H(\theta,\xi,v,p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) = H(\theta,\xi,u(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)), \quad (16)$$

выполнялось для всех $\theta \in T$, $\xi \in X$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $u(t,x)$ оптимальное управление. Докажем, что выполняется соотношение (16).

В силу оптимальности управления $u(t,x)$ из формулы приращения (15) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H(t,x,\bar{u}(t,x),p(t,x),q(t,x)) - H(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x))\right] \le 0. \quad (17)$$

В силу произвольности $\bar{u}(t,x)$ можно его определить по формуле

$$\bar{u}(t,x) = \begin{cases} v, & t=\theta\in T,\ x=\xi\in X, \\ u(t,x), & t\ne\theta,\ \ x\ne\xi. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\theta\in T$, $\xi\in X$ – произвольные точки, а $v\in U$ произвольный вектор. Принимая во внимание (18) в неравенстве (17), получаем

$$H(\theta,\xi,v,p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) - H(\theta,\xi,u(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) \le 0,$$

что равносильно (16).

Достаточность. Предположим, что для $u(t,x)$ выполняется условие максимума (16). Докажем, что управление $u(t,x)$ оптимальное.

Из (16) следует, что для любого $v=v(\theta,\xi)\in U$

$$H(\theta,\xi,v(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) - H(\theta,\xi,u(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) \le 0.$$

Из последнего неравенства в силу произвольности (θ,ξ) следует, что

$$\sum_{\theta=t_0}^{t_1-1}\sum_{\xi=x_0}^{x_1-1}\left[H(\theta,\xi,v(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) - H(\theta,\xi,u(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi))\right] \le 0. \quad (19)$$

Учитывая неравенство (17) получим, что

$$\Delta S(u) = S(v(\theta,\xi)) - S(u(\theta,\xi)) =$$

$$= -\sum_{\theta=t_0}^{t_1-1}\sum_{\xi=x_0}^{x_1-1}\left[H(\theta,\xi,v(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi)) - H(\theta,\xi,u(\theta,\xi),p(\theta,\xi),q(\theta,\xi))\right] \ge 0.$$

Следовательно

$$S(v(\theta,\xi)) \ge S(u(\theta,\xi)),$$

для всех $v(\theta,\xi)\in U$.

Из последнего соотношения следует, что управление $u(t,x)$ является оптимальным управлением.

Этим достаточность доказана.

4. Рассмотрим более общий случай функционала качества. Рассмотрим задачу о минимуме функционала.

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_1(x,z(t_1,x))+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\varphi_2(t,y(t,x_1)), \tag{20}$$

при ограничениях

$$u(t,x)\in U\ ,\quad t\in T\ ,\quad x\in X\ , \tag{21}$$

$$z(t+1,x)=A(t,x)z(t,x)+B(t,x)y(t,x)+f(t,x,u(t,x)), \tag{22}$$

$$y(t,x+1)=C(t,x)z(t,x)+D(t,x)y(t,x)+g(t,x,u(t,x)),$$

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x),\\ z(t,x_0)=b(t). \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $\varphi_1(x,z)$ $(\varphi_2(t,y))$ заданная непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y) и выпуклая по z (y) скалярная функция, а данные задачи (22)-(23) удовлетворяют тем условиям гладкости, которые приведены в п.1.

Пусть $(u(t,x),z(t,x),y(t,x))$ фиксированный, а $(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),$ $\bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\bar{y}(t,x)=y(t,x)+\Delta y(t,x))$ – произвольный – допустимые процессы.

Тогда, при помощи формулы Тейлора приращение функционала (20) записывается в виде

$$\begin{gathered}\Delta S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_1'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial\varphi_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}\Delta y(t,x_1)+\\ +\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_1(\|\Delta z(t_1,x)\|)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2(\|\Delta y(t,x_1)\|).\end{gathered} \tag{24}$$

Считая $(p(t,x),q(t,x))$ решением сопряженной системы

$$p(t-1,x)=A'(t,x)p(t,x)+C'(t,x)q(t,x), \tag{25}$$

$$q(t,x-1)=B'(t,x)p(t,x)+D'(t,x)q(t,x),$$

$$\begin{gathered} p(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z},\\ q(t,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y}, \end{gathered} \tag{26}$$

введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$M(t,x,u,p,q)=p'f(t,x,u)+q'g(t,x,u).$$

С учетом (25)-(26) формула приращения (24) по аналогии с формулой (15) преобразуется к виду

$$\Delta S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(t,x,\bar{u}(t,x),p(t,x),q(t,x)\right) - M\left(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\right] +$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|\right) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2\left(\left\|\Delta y(t,x_1)\right\|\right). \quad (27)$$

Выпуклость функций $\varphi_1(x,z)$, $\varphi_2(t,y)$ соответственно по z и y означает, что $o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|\right) \geq 0$, $o_2\left(\left\|\Delta y(t,x_1)\right\|\right) \geq 0$. Поэтому из (27) следует, что

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) \geq$$

$$\geq -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(t,x,\bar{u}(t,x),p(t,x),q(t,x)\right) - M\left(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\right] \geq 0. \quad (28)$$

При помощи неравенства (28) доказывается

Теорема 2. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(t,x,v(t,x),p(t,x),q(t,x)\right) - M\left(t,x,u(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\right] \leq 0$$

выполнялось для всех $v(t,x) \in U$, $t \in T$, $x \in X$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР. 1967, т. 175, № 1, с. 17-19.
2. Мансимов К.Б. Достаточные условия типа условий Кротова в дискретных двухпараметрических системах // Автоматика и телемеханика. 1985, № 8, с. 15-20.
3. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991, № 2, с. 359-362.
4. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.

ROSSER TİPLİ SİSTEMLƏRLƏ BİR XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.Ş.QƏDİROVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif Rosser tipli xətti diskret iki parametrli sistemlərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Funksional xətti olan halda optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat olunmuşdur. Funksional qeyri-xətti və qabarıq olduqda isə maksimum prinsipinin kafi olduğu isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Rosser tipli sistem, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, diskret maksimum prinsipi.

ON ONE LINEAR CONTROL PROBLEM OF ROESSER TYPE HYBRID SYSTEMS

S.Sh.GADIROVA

SUMMARY

The paper considers an optimal control problem described by a class of Roesser type linear two parameter discrete systems. Necessary and sufficient conditions of optimality have been proved.

Key words: Roesser type system, necessary and sufficient optimality conditions, discrete maximum principle.

Поступила в редакцию: 10.10.2015 г.
Подписано к печати: 12.02.2016 г.